ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHÉMATIQUES

**PREMIÈRE ÉPREUVE**
**FILIÈRE PSI**
**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**L'emploi de la calculette est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PSI.*
*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.*

Soit $C^m_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur la droite réelle, $2\pi$-périodiques et continues par morceaux. Soit $C_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions continues. Pour toute fonction f appartenant à $C^m_{2\pi}$, le coefficient de Fourier d'ordre n ($n\in\mathbb{Z}$) est noté $c_n(f)$ ; il est donné par la relation suivante :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,.$$

Par définition les polynômes trigonométriques de degré n sont les fonctions P appartenant à $C_{2\pi}$ qui s'écrivent :

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e^{ikx} \quad \text{avec } a_k\in\mathbb{C} \text{ et } |a_n| + |a_{-n}| \neq 0.$$

Le but de ce problème est, pour une fonction f appartenant à $C^m_{2\pi}$, de définir une suite de polynômes trigonométriques $\pi^f_n$, $n\geqslant 1$, et d'étudier la convergence de cette suite vers la fonction f. Le début du problème est consacré à la définition des fonctions $\pi^f_n$ et à l'étude de leurs propriétés à l'aide des fonctions $\psi$ (questions 1 et 2), $\varphi_u$ et G (questions 3, 4 et 5). La fin est consacrée à la convergence vers f des $\pi^f_n$, $n\geqslant 1$, en effectuant des hypothèses sur la fonction f (question 6).

Soit $\psi$ la fonction définie sur l'intervalle ouvert I = ]0, $\pi$[ par la relation ci-dessous :

$$\psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

1°) Expressions de la fonction $\psi$ :

a. Démontrer qu'il existe une fraction rationnelle R telle que la fonction $\psi$ s'écrive sous la forme : $\psi(x) = R(\sin x)$. Préciser la fraction rationnelle R.

Soit n un entier strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) ;

b. La relation : $\frac{\sin(nx)}{\sin x} = e^{-i(n-1)x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikx}$, pour tout réel x de l'intervalle I, est admise. Démontrer qu'il existe un polynôme trigonométrique $Q_n$ dont le degré sera précisé tel que, pour tout x de l'intervalle I, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2 = Q_n(2x).$$

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme trigonométrique $P_n$ tel que, pour tout réel x de l'intervalle I, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\psi(x) \sin^4(nx) = P_n(2x).$$

Démontrer que le degré du polynôme $P_n$ est 2n–1 sans rechercher tous ses coefficients.

Dans la suite du problème le polynôme trigonométrique $P_n$ est noté :

$$P_n(x) = \sum_{k=-2n+1}^{2n-1} a_{n,k}\, e^{ikx}.$$

2°) Polynômes $\pi_n^f$ :

Étant donnés une fonction f appartenant à l'espace $C_{2\pi}^m$ et un entier n strictement positif, soit $\pi_n^f$ le polynôme trigonométrique défini par la relation :

(1) $$\pi_n^f(x) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=-2n+1}^{2n-1} a_{n,-k}\, c_k(f)\, e^{ikx}.$$

Démontrer l'existence d'une constante C, qui sera déterminée, telle que, pour tout réel x, il vienne : $$\pi_n^f(x) = \frac{C}{n^3} \int_0^{\pi} f(x+2u)\psi(u)\sin^4(nu)\,du.$$

Soit u un réel de l'intervalle I ($u \in ]0, \pi[$) ; soit $\varphi_u$ la fonction, $2\pi$-périodique, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$, par la relation :

pour tout réel x tel que $-\pi \leqslant x < \pi$, $\varphi_u(x) = \exp\left(-\frac{iux}{\pi}\right)$.

3°) Étude de la fonction $\varphi_u$ :

a. Démontrer que la fonction $\varphi_u$ est continue par morceaux ; calculer ses coefficients de Fourier $c_n(\varphi_u)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire, pour tout réel u de l'intervalle I, une relation entre les expressions $\frac{1}{\sin^2 u}$ et $\lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^2}$ .

c. En déduire, pour tout réel u de l'intervalle I, la relation suivante :

$$\psi(u) = 6 \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^4} .$$

Étant donnés une fonction g appartenant à l'espace $C^m_{2\pi}$ et un entier n strictement positif ($n \geqslant 1$), soit $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par la relation :

$$G(t) = \begin{cases} g(2t)\dfrac{\sin^4(nt)}{t^4}, & \text{si } t \neq 0, \\ n^4\, g(0), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La fonction g et l'entier n étant fixés, soit $(\gamma_p)_{p\geqslant 1}$ la suite des fonctions complexes définies sur l'intervalle I par la relation :

$$\gamma_p(u) = g(2u)\sin^4(nu) \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^4} .$$

4°) Propriétés de la fonction G :

a. Soit f une fonction de l'espace $C^m_{2\pi}$ ; établir que la fonction f est bornée.

Soit $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de l'ensemble des réels $|f(x)|$, pour tout x réel :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| .$$

Soient g une fonction appartenant à l'espace $C^m_{2\pi}$ et n un entier strictement positif ($n \geqslant 1$).

b. Démontrer que la fonction G est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que chaque fonction $\gamma_p$, $p \geqslant 1$, se prolonge par continuité aux extrémités de l'intervalle I.

d. Comparer les deux intégrales $\int_{-p\,\pi}^{(p+1)\,\pi} G(t)dt$ et $\int_0^{\pi} \gamma_p(u)du$.

e. En déduire l'expression de l'intégrale de la fonction G étendue à $\mathbb{R}$ en fonction de l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^{\pi} g(2u)\psi(u)\sin^4(nu)\,du\,.$$

5°) Propriétés du polynôme $\pi_n^f$ :

Soit f une fonction quelconque de l'espace $C_{2\pi}^m$ et n un entier strictement positif.

a. Démontrer que, pour tout réel x donné, la fonction $t \mapsto f(x+\frac{2t}{n})\frac{\sin^4 t}{t^4}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que le polynôme trigonométrique $\pi_n^f$, défini à la question 2, admet l'expression intégrale :

$$\pi_n^f(x) = \frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{2t}{n})\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt\,.$$

c. Dans cette question la fonction f est la fonction constante égale à 1. Calculer $\pi_1^f$ (n=1). En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4}dt$. Que vaut $\pi_n^f(x)$ ?

6°) Convergence de la suite des polynômes trigonométriques $\pi_n^f$, $n \geq 1$ :

a. Démontrer que, si la fonction f est continûment dérivable, la majoration

$$\|\pi_n^f - f\|_\infty \leq \frac{2}{n}\|f'\|_\infty$$

a lieu.

b. Démontrer une majoration analogue lorsque la fonction f possède la propriété suivante : il existe une constante M strictement positive et une constante $\alpha$ strictement comprise entre 0 et 1, $0 < \alpha < 1$, telles que, pour tout couple de réels x et y, il vienne :

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|^{\alpha}.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail